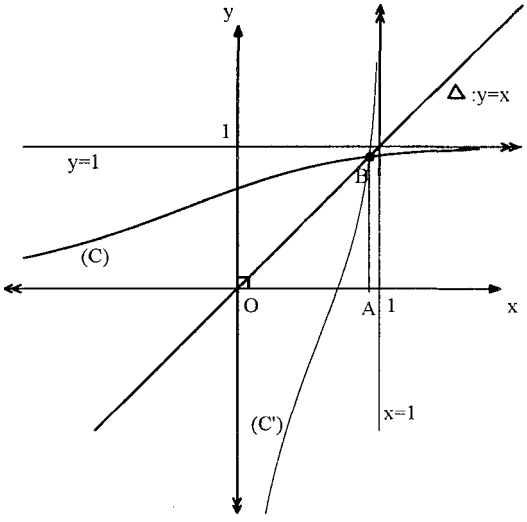

3/a- f est strictement croissante sur IR

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de IR sur $J = f(IR)$.

Or $J = \left]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f\right[$ car f est continue et $\nearrow$ sur IR

$=]0;1[$.

b- $\forall x \in J; f\left[\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right] = f\left[\text{Log}\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\right]$

$$= \frac{\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x = f[f^{-1}(x)]$$

$\forall x \in J; f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = g(x)$.

traçage de (C') : (voir figure précédente)

$(C') = S_\Delta((C))$ avec Δ la droite d'équation $y = x$.

II/

1/ Comme f est dérivable sur IR alors φ l'est aussi.

$$\forall x \in IR; \varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x - (1+e^{2x})(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$\cdot 1 + e^{2x} > 1; \forall x \in IR \quad (1)$

$\cdot 1 + e^{2x} > e^{2x}; \forall x \in IR \Leftrightarrow (1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} > e^x; \forall x \in IR \quad (2)$

(1) et (2) $\Rightarrow (1+e^{2x})(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} > e^x; \forall x \in IR$

$\Leftrightarrow e^x - (1+e^{2x})(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} < 0; \forall x \in IR.$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) < 0; \forall x \in IR.$